Shimura-Varietäten III

Ulrich Görtz
http://www.math.uni-bonn.de/people/ugoertz/shimura.html

5. Mai 2006

Shimura-Daten

Definition

Ein Shimura-Datum ist ein Paar (G, X), bestehend aus einer reduktiven algebraischen Gruppe G über $\mathbb{Q}$ und einer $G(\mathbb{R})$-Konjugationsklasse von Homomorphismen $h\colon \mathbb{S} \longrightarrow G_{\mathbb{R}}$, so dass gilt:

- SV1 Für alle $h \in X$ ist $\mathrm{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ vom Typ $(-1, 1), (0, 0), (1, -1)$.
- SV2 Die Involution $\mathrm{int}h(i)$ ist eine Cartan-Involution von $G_{\mathbb{R}}^{\mathrm{ad}}$.
- SV3 G^{ad} hat keinen über $\mathbb{Q}$ definierten Faktor H, so dass $H(\mathbb{R})$ kompakt ist.

Übersicht Wiederholung Kanon. Modell Das kanonische Modell im Siegel-Fall Harter Descent

Satz

Sei (G, X) ein Shimura-Datum. Dann trägt X eine eind. best. Struktur einer kpl. Mf., so dass für jede Darstellung $\rho\colon G_{\mathbb{R}} \longrightarrow GL(V)$ die Familie $(V, \rho \circ h)_{h \in X}$ eine holom. Familie von HS ist.

Für diese kpl. Struktur ist jede solche Familie sogar eine Variation von HS. Insbes. ist X eine endl. disj. Vereinigung hermitesch symmetrischer Bereiche.

Definition

$K \subseteq G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen.

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Alternative Beschreibung

Ist $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$, so

$$\mathrm{Sh}_K(G,X)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/KK_\infty$$

Satz

Sei $\mathscr{C} \subset G(\mathbb{A}_f)$ ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen $G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$.
Sei X^+ eine Zusammenhangskomponente von X.
Dann

$$G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K \cong \coprod_{g\in\mathscr{C}} \Gamma_g\backslash X^+,$$

wobei $\Gamma_g = gKg^{-1} \cap G(\mathbb{Q})_+$.

Modelle von Varietäten über Zahlkörpern

Sei V ein Schema über $\mathbb{C}$.

Definition

Ein Modell von V über einem Zahlkörper k ist ein Schema V_0 über k mit einem Isomorphismus $V_0 \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\cong} V$.

Zu gegebenem V gibt es in der Regel kein Modell über einem Zahlkörper. Wenn eines existiert, so ist es in der Regel nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel: Elliptische Kurven

Eine elliptische Kurve E über $\mathbb{C}$ hat genau dann ein Modell über einem Zahlkörper, wenn die j-Invariante $j(E) \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl ist.

Ist

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad a, b \in k,$$

ein Modell von E, so ist auch

$$y^2 = x^3 + ac^2x + bc^3, \qquad c \in k,$$

eines, das zum ersten genau dann isomorph ist, wenn c ein Quadrat in k ist.

Operation von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$

Ist V_0 ein Modell von $V/\mathbb{C}$ über E, so erhalte Operation von $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$ auf $V(\mathbb{C}) = V_0(\mathbb{C})$.

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$ ist sehr groß, und keiner expliziten Beschreibung zugänglich.

Beispiel

Ist $E = \mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$ eine ell. Kurve über $\mathbb{C}$ mit j-Invariante $j(\tau)$, so ist im allgemeinen

$$j(\sigma E) = \sigma(j(\tau)) \neq j(\sigma\tau).$$

Globale Klassenkörpertheorie

Theorem

E Zahlkörper

$$\pi_0(E^\times \backslash \mathbb{A}_E^\times) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gal}(\overline{E}/E)^{\mathrm{ab}}$$

Beispiel

Satz von Kronecker-Weber

$$\mathbb{Q}^{\mathrm{ab}} = \mathbb{Q}(\zeta_n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

und es gilt

$$\pi_0(\mathbb{Q}^\times \backslash \mathbb{A}^\times) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^\times$$

Die Artin-Abbildung

Haben Abbildung

$$\mathrm{art}\colon \mathbb{A}_E^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E),$$

so dass für L/E endlich, abelsch

$$\begin{tikzcd} E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times \arrow[r, "\mathrm{art}"] \arrow[d] & \mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E) \arrow[d] \\ E^\times\backslash\mathbb{A}_E^\times/\mathrm{Nm}_{L/E}\mathbb{A}_L^\times \arrow[r, "\cong", "\mathrm{art}_{L/E}"'] & \mathrm{Gal}(L/E) \end{tikzcd}$$

kommutiert und $\mathrm{art}_{L/E}$ ist eindeutig charakterisiert durch

- Für $v \in \mathrm{Pl}_0(E)$ unverzweigt ist $\mathrm{art}_{L/E}(\pi_v) = \mathrm{Fr}(v, L/E)^{-1} \in \mathrm{Gal}(L/E)$
- Es gilt $\mathrm{art}_{L/E}(u) = 1$ für alle $u = (u_v)_v \in \mathbb{A}_E^\times$, s. d.
  - Für v unverzweigt in L ist u_v eine Einheit,
  - Für v verzweigt ist $|u_v - 1|$ "klein" (abh. von L/E),
  - Für v reell und komplex in L ist $u_v > 0$.

Endomorphismen elliptischer Kurven

$E = \mathbb{C}/\Lambda$ elliptische Kurve $/\mathbb{C}$.

$$\mathrm{End}(E) = \{\alpha \in \mathbb{C};\ \alpha\Lambda \subseteq \Lambda\}$$

Beispiel

$\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$, $\tau \in \mathbb{H}$.

Sei $\alpha = x + iy \in \mathrm{End}(E)$, $y \neq 0$.

Dann

$$\alpha \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau, \quad \alpha\tau \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$$

Erhalte quadratische Gleichung für τ.

Endomorphismen elliptischer Kurven

Satz

Sei E eine elliptische Kurve über einem perfekten Körper k. Dann ist der Ring $\mathrm{End}(E)$ *der Endomorphismen von E*

1. $\mathbb{Z}$, *oder*
2. *eine Ordnung in einem imaginär-quad. Zahlkörper*
3. *eine Ordnung in einer definiten Quaternionenalgebra über* $\mathbb{Q}$

Ist $\mathrm{char}\, k = 0$, *so können nur die ersten beiden Fälle eintreten.*

Definition

Sei $E/\mathbb{C}$ eine elliptische Kurve. Wir sagen, E habe komplexe Multiplikation, falls $\mathrm{End}(E) \neq \mathbb{Z}$.

Komplexe Multiplikation

Sei $K/\mathbb{Q}$ ein imaginär-quad. Zahlkörper, $R_f = \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K \subseteq \mathcal{O}_K$ eine Ordnung.

Satz

- *Ist $M \subseteq K$ ein Gitter mit Endomorphismenordnung R_f, so ist $E = \mathbb{C}/M$ eine elliptische Kurve mit komplexer Multiplikation, und* $\mathrm{End}(E) \cong R_f$.
- *Diese Zuordnung definiert Bijektion*

$$(\text{Ell.K. } E/\mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{End}(E) \cong R_f) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cl}(R_f)$$

Korollar

Ist E eine elliptische Kurve $/\mathbb{C}$ mit komplexer Multiplikation, so ist $j(E)$ algebraisch.

Explizite Klassenkörpertheorie

Theorem (Weber-Fueter)

Sei K ein imaginär-quad. Zahlkörper, E die ell. Kurve mit CM durch $\mathcal{O}_K$ zu $\Lambda \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$.

- *$j(E)$ ist eine ganze algebraische Zahl.*
- $[K(j(E))\colon K] = [\mathbb{Q}(j(E))\colon \mathbb{Q}]$.
- *$H := K(j(E))$ ist die maximal unverzweigte abelsche Erweiterung von K.*
- *Sei $\Lambda_1, \dots, \Lambda_h$ ein Vertretersystem für $\mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$. Dann sind $j(\Lambda_1), \dots, j(\Lambda_h)$ die $\mathrm{Gal}(H/K)$-Konjugierten von $j(\Lambda)$.*

Übersicht Wiederholung Kanon. Modell Das kanonische Modell im Siegel-Fall Harter Descent

Haben Frobenius-Element $\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(H/K)$ durch

$$\mathrm{Fr}_\mathfrak{p} \in \mathrm{Gal}(H_\mathfrak{P}/K_\mathfrak{p}) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{H}_\mathfrak{P}/\overline{K}_\mathfrak{p}).$$

Theorem (Hasse)

Sei $\Lambda \in \mathrm{Cl}(\mathcal{O}_K)$, $H = K(j(\Lambda))$. Sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von $\mathcal{O}_K$. Wenn es eine elliptische Kurve über H mit j-Invariante $j(\Lambda)$ gibt, die an allen Stellen von H über $\mathfrak{p}$ gute Reduktion hat, so gilt

$$\mathrm{Fr}_\mathfrak{p}(j(\Lambda)) = j(\Lambda\mathfrak{p}^{-1}).$$

Der zu h assoz. Kocharakter

Lemma

Sei $G/\mathbb{Q}$ eine reduktive alg. Gruppe, $k \subseteq \mathbb{C}$ ein Körper, über dem G zerfällt, d. h. G_k enthält einen maximalen Torus $T \cong \mathbb{G}_{m,k}^r$. Sei $W = N_{G(k)}(T)/C_{G(k)}(T)$ die Weyl-Gruppe von T. Dann ist die Abbildung

$$W\backslash \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T) \xrightarrow{\cong} G(k)\backslash \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G_k)$$

bijektiv.

Sei (G, X) ein Shimura-Datum. Zu $x \in X$ definiere

$$\mu_x \colon \mathbb{G}_m \longrightarrow G_{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto h_{x,\mathbb{C}}(z, 1).$$

Dies definiert einen Kocharakter $\mu_x \in \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\mathbb{C}})$. Können $\mu = \mu_x$ als Element von $G(\overline{\mathbb{Q}})\backslash \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\overline{\mathbb{Q}}})$ betrachten, unabhängig von x.

Der Reflexkörper

Definition

Der Reflexkörper $E(G, X)$ des Shimura-Datums (G, X) ist der Definitionskörper von μ, d. h. der Fixkörper in $\overline{\mathbb{Q}}$ der Untergruppe

$$\{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q});\ \sigma\mu = \mu \in G(\overline{\mathbb{Q}})\backslash \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, G_{\overline{\mathbb{Q}}})\} \subseteq \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).$$

Beispiel

- Ist $G = T$ ein Torus, so ist der Reflexkörper der Definitionskörper von μ_h.
- Ist (G, X) ein einfaches PEL-Datum, so ist $E(G, X)$ der Körper, der über $\mathbb{Q}$ erzeugt wird von den Elementen $\mathrm{Tr}_X b = \mathrm{Tr}(b|_{V(\mathbb{C})/F_h^0})$, $b \in B$.

Der Fall von Tori

Sei k ein Körper der Char. 0. Haben Äquivalenz von Kategorien

$$\text{(0-dim. Varietäten } /k) \xrightarrow{\cong}$$
$$\text{(Endl. Mengen mit stetiger } \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)\text{-Operation)}$$

Um ein Modell über einem Zahlkörper E von einer 0-dimensionalen Varietät V über $\mathbb{C}$ anzugeben, genügt es eine Operation von $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E)$ auf der endlichen Menge $V(\mathbb{C})$ anzugeben.

Sei $T/\mathbb{Q}$ ein Torus, $h\colon \mathbb{S} \longrightarrow T$. Dann ist $(T, \{h\})$ ein Shimura-Datum, und $E = E(T, h)$ ist der Definitionskörper von μ_h. Die Menge

$$\mathrm{Sh}_K(T, h) = T(\mathbb{Q})\backslash\{h\} \times T(\mathbb{A}_f)/K$$

ist endlich, und mit

$$r_h\colon \mathbb{A}_E^\times \xrightarrow{\mathrm{Nm}\circ\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mu_h(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} T(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}} T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$$

induziert die Vorschrift

$$\sigma(h, a) = (h, r_h(s)a)$$

für $\sigma = \mathrm{art}(s)$ eine Operation von $\mathrm{Gal}(E^{\mathrm{ab}}/E)$ auf $\mathrm{Sh}_K(T, X)$. Das zugehörige Modell von $\mathrm{Sh}_K(T, h)$ ist per definitionem kanonisch.

Spezielle Punkte

Definition

Ein Punkt $x \in X$ heißt speziell, wenn ein Torus $T \subseteq G$ über $\mathbb{Q}$ existiert, so dass $h_x(\mathbb{C}^\times) \subseteq T(\mathbb{R})$.
Das Paar (T, x) (oder (T, h_x)) heißt dann ein spezielles Paar in (G, X).

Beispiel

Sei $G = GL_2$, $X = \mathbb{H}^\pm = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Sei $z \in X$, so dass $F = \mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$ eine imaginär-quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.
Erhalte Einbettung $F = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}z \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ und daraus einen maximalen Torus $T = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F} \subseteq GL_{2,\mathbb{Q}}$.
Es ist (T, z) ein spezielles Paar. Ist andererseits $z \in X$ speziell, so ist $\mathbb{Q}(z)$ eine imaginär-quadratische Erweiterung von $\mathbb{Q}$.

Der Homomorphismus r_x

Sei $T/\mathbb{Q}$ ein Torus, sei $E/\mathbb{Q}$ eine endliche Erweiterung, und sei μ ein über E definierter Kocharakter von T.

Sei $r(T, \mu)$ der Homomorphismus

$$\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \xrightarrow{\mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mu} \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}T \xrightarrow{\mathrm{Nm}} T$$

Sei (T, x) ein spezielles Paar in (G, X), sei $E(x)$ der Definitionskörper von μ_x. Definiere Homomorphismus r_x

$$\mathbb{A}^\times_{E(x)} \xrightarrow{r(T,\mu_x)(\mathbb{A}_\mathbb{Q})} T(\mathbb{A}_\mathbb{Q}) \xrightarrow{\mathrm{pr}} T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f})$$

Definition des kanonischen Modells

Für ein spezielles Paar (T, x) in (G, X) haben wir Homomorphismen

$$\begin{aligned} \mathrm{art} &: \mathbb{A}_{E(x)}^{\times} \longrightarrow \mathrm{Gal}(E(x)^{\mathrm{ab}}/E(x)) \\ r_x &: \mathbb{A}_{E(x)}^{\times} \longrightarrow T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q},f}) \end{aligned}$$

Definition

Sei (G, X) ein Shimura-Datum, $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ kompakt, offen. Ein Modell $M_K(G, X)$ von $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ über $E(G, X)$ heißt kanonisches Modell, wenn für jedes spezielle Paar (T, x) und jedes $a \in G(\mathbb{A}_f)$ der Punkt $[x, a]_K$ Koordinaten in $E(x)^{\mathrm{ab}}$ hat und

$$\sigma[x, a]_K = [x, r_x(s)a]_K$$

für alle $\sigma \in \mathrm{Gal}(E(x)^{\mathrm{ab}}/E(x))$, $s \in \mathbb{A}_{E(x)}^{\times}$ mit $\mathrm{art}_{E(x)}(s) = \sigma$.

Definition

- Ein Modell von $\mathrm{Sh}(G, X)$ über einem Teilkörper $E \subseteq \mathbb{C}$ ist ein inverses System $(M_K(G, X))_K$ von Varietäten über E mit einer Rechtsoperation von $G(\mathbb{A}_f)$, zusammen mit einem $G(\mathbb{A}_f)$-äquivarianten Isomorphismus $(M_K(G, X))_K \xrightarrow{\cong} (\mathrm{Sh}_K(G, X))_K$.
- Ein solches Modell heißt kanonisch, wenn für jedes K das Modell $M_K(G, X)$ ein kanonisches Modell von $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ ist.

Zusammenhangskomponenten

Sei (G,X) ein Shimura-Datum, Z das Zentrum von G, $T = G/G^{\text{der}}$ der größte abelsche Quotient von G. Haben

$Z \longrightarrow G \xrightarrow{\nu} T$.

Definiere

$$\begin{aligned} T(\mathbb{R})^{\dagger} &= \mathrm{im}(Z(\mathbb{R}) \longrightarrow T(\mathbb{R})) \\ T(\mathbb{Q})^{\dagger} &= T(\mathbb{Q}) \cap T(\mathbb{R})^{\dagger} \end{aligned}$$

Beispiel

Ist $G = GL_2$, so ist $\nu = \det\colon GL_2 \to T \cong \mathbb{G}_m$, $T(\mathbb{Q})^{\dagger} = T(\mathbb{Q})^{+} = \mathbb{Q}_{>0}$.

Theorem

Sei G^{der} einfach zusammenhängend.

1. *Es gilt $\nu(G(\mathbb{Q})_+) \subseteq T(\mathbb{Q})^{\dagger}$.*
2. *Für hinreichend kleine K induziert die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K & \xrightarrow{\cong} & \\ G(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K & \longrightarrow & T(\mathbb{Q})^{\dagger}\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K) \\ (x,g) & \mapsto & \nu(g) \end{array}$$

eine Bijektion

$$\pi_0(\mathrm{Sh}_K(G,X)) \xrightarrow{\cong} T(\mathbb{Q})^{\dagger}\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K)$$

Galois-Op. auf π_0

Ist G^{der} einfach zusammenhängend, so gilt

$$\begin{aligned}\pi_0(\mathrm{Sh}_K(G,X)) &= T(\mathbb{Q})^{\dagger}\backslash T(\mathbb{A}_f)/\nu(K) \\ &= T(\mathbb{Q})\backslash(T(\mathbb{R})^{\dagger}\backslash T(\mathbb{R})) \times T(\mathbb{A}_f)/\nu(K).\end{aligned}$$

Sei $x \in X$, $h = \nu \circ h_x \colon \mathbb{S} \longrightarrow T$ und μ_h der zugehörige Kocharakter von $T_{\mathbb{C}}$. Erhalten

$$r\colon \mathbb{A}_{E(G,X)}^{\times} \longrightarrow T(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}).$$

Sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E(G,X))$, und sei $s \in \mathbb{A}_{E(G,X)}^{\times}$ mit $\mathrm{art}_{E(G,X)}(s) = \sigma|_{E(G,X)^{\mathrm{ab}}}$. Sei $r(s) = (r(s)_\infty, r(s)_f)$. Dann

$$\sigma(y,a) = (r(s)_\infty y, r(s)_f a), \quad y \in T(\mathbb{R})^{\dagger}\backslash T(\mathbb{R}),\ a \in T(\mathbb{A}_f).$$

Eindeutigkeit kanonischer Modelle

Lemma

Sei $L \subset \mathbb{C}$ eine endlicher Erweiterungskörper von $E(G,X)$. Dann existiert ein spezieller Punkt x, so dass $E(x)$ und L linear disjunkt sind.

Theorem

1. *Sind M_1, M_2 kanonische Modelle von $\mathrm{Sh}_K(G,X)$, so existiert ein eindeutig bestimmter Isomorphismus $M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$, der auf $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ die Identität induziert.*
2. *Sind für alle K kanonische Modelle von $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ gegeben, so bilden diese ein kanonisches Modell von $\mathrm{Sh}(G,X)$.*

Das Shimura-Datum zu einem symplektischen VR

Sei (V, ψ) ein symplektischer $\mathbb{Q}$-VR, $G = GSp(V, \psi)$.

Ist $J \in G^{\mathrm{der}}(\mathbb{R})$ eine komplexe Struktur auf $V(\mathbb{R})$, so erhalte HS $h_J \colon \mathbb{S} \longrightarrow G \subseteq GL(V)$ vom Typ $(-1, 0), (0, -1)$ auf V.

Wir nennen J positiv (negativ), wenn $\psi(u, Jv)$ positiv (negativ) definit ist.

Sei X^+ (bzw. X^-) die Menge der positiven (bzw. negativen) kompl. Str. auf $V(\mathbb{R})$, $X = X(V, \psi) = X^+ \coprod X^-$.

Sh als Modulraum abelscher Varietäten

Sei $\mathscr{M}_K$ die Menge von Tripeln $(A, s, \eta K)$, wo

- A eine abelsche Varietät der Dimension $g = \frac{1}{2} \dim V$ über $\mathbb{C}$
- $\pm s$ eine Polarisierung von $H_1(A, \mathbb{Q})$
- η ein Isomorphismus $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} H_1(A, \mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein $\mathbb{A}_f^\times$-Vielfaches von s abbildet.

Dabei sind zwei Tripel $(A, s, \eta K)$, $(A', s', \eta' K)$ isomorph wenn eine Isogenie $A \longrightarrow A'$ existiert, die s auf ein $\mathbb{Q}^\times$-Vielfaches auf s', und ηK auf $\eta' K$ abbildet.

Satz

Die Menge $\mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C})$ *steht in natürlicher Weise in Bijektion zu* $\mathscr{M}_K / \cong$.

CM-Körper

Definition

Ein Zahlkörper E heißt CM-Körper, wenn E eine total imaginäre quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers F ist.

Sei $x \mapsto x^*$ der nicht-triviale Homomorphismus in $\mathrm{Gal}(E/F)$. Dann gilt $\rho(x^*) = \overline{\rho(x)}$ für jede Einbettung $\rho\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$.

Definition

Ein CM-Typ Φ für E ist eine Teilmenge $\Phi \subset \mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})$, so dass

$$\mathrm{Hom}(E, \mathbb{C}) = \Phi \coprod \overline{\Phi}.$$

CM für abelsche Varietäten

Definition

Sei $A/\mathbb{C}$ eine abelsche Varietät der Dimension g, sei E ein CM-Körper mit $[E\colon \mathbb{Q}] = 2g$, und sei $i\colon E \longrightarrow \mathrm{End}^0(A)$ ein Homomorphismus. Gilt

$$\mathrm{Tr}(i(a)|_{T_0 A}) = \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi(a) \text{ für alle } a \in E$$

so sagen wir, A habe komplexe Multiplikation durch (E, Φ).

Sei Φ ein CM-Typ für E. Betrachte Abbildung

$$\Phi\colon \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathbb{C}^\Phi, \quad x \mapsto (\phi(a))_{\phi\in\Phi}.$$

Satz

Das Bild $\Phi(\mathcal{O}_E)$ von Φ ist ein Gitter in $\mathbb{C}^\Phi$ und $A_\Phi = \mathbb{C}^\Phi/\Phi(\mathcal{O}_E)$ ist eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ).
Jede abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) ist E-isogen zu A_Φ.

Satz

Sei (A, i) eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) über $\mathbb{C}$. Dann hat (A, i) ein Modell über $\overline{\mathbb{Q}}$, das bis auf Isomorphismus eindeutig bestimmt ist.

Der Reflexkörper eines CM-Typs

Definition

Der Reflex-Körper E^* eines CM-Types (E, Φ) ist der Teilkörper von $\overline{\mathbb{Q}}$, der die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt:

- $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ fixiert E^* genau dann, wenn $\sigma\Phi = \Phi$.
- $E^* = \mathbb{Q}(\sum_{\varphi\in\Phi} \varphi(a), a \in E)$
- E^* ist der kleinste Teilkp. k von $\overline{\mathbb{Q}}$, so dass ein k-VR V mit einer E-Operation existiert, für die gilt

$$\mathrm{Tr}_k(a|_V) = \sum_{\varphi\in\Phi} \varphi(a) \quad \text{für alle } a \in E$$

Beispiel

Sei (E, Φ) ein CM-Typ, und sei $T = \mathrm{Res}_{E,\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$, also $T(\mathbb{Q}) = E^\times$,

$$T(\mathbb{R}) = (E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R})^\times \xrightarrow{\cong} (\mathbb{C}^\Phi)^\times, \quad e \otimes r \mapsto (\varphi(e)r)_{\varphi\in\Phi}.$$

Definiere $h_\Phi \colon \mathbb{C}^\times \longrightarrow T(\mathbb{R})$ durch $z \mapsto (z, \ldots, z)$. Der zugehörige Kocharakter μ_h ist

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & T(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^\Phi)^\times \times (\mathbb{C}^{\overline{\Phi}}) \\ z & \mapsto & (z, \ldots, z, 1, \ldots, 1) \end{array}$$

Der Reflexkörper ist dann der Reflexkörper des CM-Typs (E, Φ).

Hauptsatz über abelsche Varietäten mit CM

Reflexnorm

Sei V ein E^*-VR wie oben. Die Reflex-Norm N_{Φ^*} ist der Homom.

$$\mathrm{Res}_{E^*/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m, \quad a \mapsto \det_E(a|_V), a \in (E^*)^\times$$

Ist (A, i) eine abelsche Varietät mit CM vom Typ (E, Φ), so ist E^* in jedem Definitionskörper von (A, i) enthalten.

Sei A eine abelsche Varietät über einem Kp. K der Char. 0.

$$\begin{array}{rcl} T_\ell & := & \varprojlim A(\overline{K})[\ell^n] \\ V_f(A) & := & (\prod_\ell T_\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \prod((T_\ell \otimes \mathbb{Q}) | T_\ell) = H_1(A, \mathbb{A}_f) \end{array}$$

Theorem

Sei (A, i) eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ) über $\mathbb{C}$, und sei $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E)$. Sei $s \in \mathbb{A}_{E^*,f}^{\times}$ mit $\mathrm{art}_{E^*}(s) = \sigma|_{E^{*,\mathrm{ab}}}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte E-lineare Isogenie $\alpha\colon A \longrightarrow \sigma A$, so dass

$$\alpha(N_{\Phi^*}(s) \cdot x) = \sigma x$$

für alle $x \in V_f(A)$.

Shimura-Taniyama-Formel

Sei (A, i) eine abelsche Varietät vom CM-Typ (E, Φ), definiert über einem Zahlkörper k, die gute Reduktion in $\mathfrak{P} \subseteq \mathcal{O}_k$ hat.

Lemma

Der Frobenius-Endomorphismus $\pi_{A_{\mathfrak{P}}}$ von $A_{\mathfrak{P}}$ liegt in $\iota_{\mathfrak{P}}(E)$.

Sei nun $k/\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung, die alle Konjugierten von E enthält.

Theorem

Ist $v|p$ eine Primstelle von E, so gilt

$$\frac{\mathrm{ord}_v(\pi_{A_{\mathfrak{P}}})}{\mathrm{ord}_v(q)} = \frac{|\Phi \cap H_v|}{|H_v|},$$

wobei $H_v = \{\rho\colon E \longrightarrow k;\ \rho^{-1}(\mathfrak{P}) = v\}$.

Spezielle Punkte im Siegel-Fall

Definition

Eine CM-Algebra ist ein endliches Produkt von CM-Körpern. Eine abelsche Varietät A über $\mathbb{C}$ hat CM, falls eine CM-Algebra E und ein Homomorphismus $E \longrightarrow \mathrm{End}^0(A)$ existieren, so dass $H_1(A, \mathbb{Q})$ ein freier E-Modul vom Rang 1 ist.

Satz

Eine abelsche Varietät $A/\mathbb{C}$ ist genau dann CM, wenn ein Torus $T \subset GL(H_1(A, \mathbb{Q}))$ existiert, so dass $h_A(\mathbb{C}^\times) \subseteq T(\mathbb{R})$.

Sh als Modulraum abelscher Varietäten

Sei $\mathscr{M}_K$ die Menge von Tripeln $(A, s, \eta K)$, wo

- A eine abelsche Varietät der Dimension $g = \frac{1}{2} \dim V$ über $\mathbb{C}$
- $\pm s$ eine Polarisierung von $H_1(A, \mathbb{Q})$
- η ein Isomorphismus $V(\mathbb{A}_f) \xrightarrow{\cong} V_f(\mathbb{A}_f)$, der ψ auf ein $\mathbb{A}_f^\times$-Vielfaches von s abbildet.

Dabei sind zwei Tripel $(A, s, \eta K)$, $(A', s', \eta' K)$ isomorph wenn eine Isogenie $A \longrightarrow A'$ existiert, die s auf ein $\mathbb{Q}^\times$-Vielfaches auf s', und ηK auf $\eta' K$ abbildet.

Satz

Der Raum $\mathscr{M}_K$ ist in natürlicher Weise über $\mathbb{Q}$ definiert und ist das kanonische Modell der Siegel-Shimura-Varietät $\mathrm{Sh}_K(G, X)$.

Harter Descent

Sei k'/k eine Körpererweiterung, char $k = 0$, k' alg. abgeschlossen, $\mathcal{A} = \mathrm{Aut}(k'/k)$.

Haben volltreuen Funktor

$$(k\text{-Schemata}) \to (k'\text{-Schemata}\, V + \mathcal{A}\text{-Operation auf } V(k')).$$

Frage: Wann liegt $(V, \cdot)$ im Bild dieses Funktors?

Regularität

Die Operation $\cdot$ von $\mathcal{A}$ auf $V(k')$ heißt regulär, wenn für alle $\sigma \in \mathcal{A}$ die Abbildung

$$(\sigma V)(k') \longrightarrow V(k'), \quad \sigma x \mapsto \sigma \cdot x$$

von einem Isomorphismus von Schemata kommt.

Stetigkeit

Die Operation $\cdot$ von $\mathcal{A}$ auf $V(k')$ heißt stetig, wenn ein Teilkörper $L \subseteq k'$ existiert, der k enthält und endlich erzeugt ist über k, und ein Modell V_0 von V über L existiert, so dass die durch V_0 auf $V(k')$ definierte $\mathrm{Aut}(k'/L)$-Operation die Einschränkung von $\cdot$ ist.

Satz

Eine reguläre Operation $\cdot$ auf $V(k')$ ist stetig, wenn Punkte $x_1, \ldots, x_n \in V(k')$ existieren, so dass

1. *Der einzige Automorphismus von V, der alle Punkte x_i fixiert, ist id_V.*
2. *Es existiert ein Teilkörper $L \subseteq k'$, der endlich erzeugt über k ist, und so dass für jedes $\sigma \in \mathrm{Aut}(k'/L)$ gilt: $\sigma x_i = x_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Theorem (Weil)

Ist V/k' quasi-projektiv, und ist die Operation $\cdot$ regulär und stetig, so ensteht $(V, \cdot)$ durch Basiswechsel von einer Varietät über k.